

ΑΓΜΑ (MEM-100) – Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Άσκηση 1. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ο $z = (\lambda + 3i)(2 - i)$ να είναι

(a) πραγματικός αριθμός, (b) φανταστικός αριθμός.

Άσκηση 2. Γράψτε τους ακόλουθους μιγαδικούς αριθμούς σε μορφή $a + bi$, για $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1-i}, \quad i^6, \quad i^2 + 2i + 1, \quad (1 + i\sqrt{3})^2, \quad \frac{3+i}{2-i}, \quad \frac{6-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}.$$

Άσκηση 3. Να βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει:

(a) $(x + y) + (x - y)i = 3 - i$

(b) $\sqrt{3x^2 + x - 6} + (x^2 - 3)i = 2 + i$

(c) $9 - 27i = (3x + 2y) - yi$

Άσκηση 4. Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$(a) z - \bar{z} = 6i, \quad (b) z^2 = \bar{z}^2, \quad (c) z^2 = -\bar{z}^2, \quad (d) \bar{z} = 2 - z.$$

Άσκηση 5. Βρείτε τις ρίζες των εξισώσεων

$$(a) x^2 - 3x + 2 = 0, \quad (b) x^2 - 2x + 3 = 0, \quad (c) x + \frac{1}{x} = 1.$$

Άσκηση 6. Εξετάστε πότε το πηλίκο $\frac{a+bi}{c+di}$ είναι πραγματικός αριθμός, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 7. Λύστε τις εξισώσεις (a) $\bar{z} = z^2$, (b) $\bar{z} = z^3$.

Άσκηση 8. Έστω μιγαδικός $z \neq 0$. Δείξτε ότι ο $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$ είναι πραγματικός και ότι ισχύει η ανισότητα $-2 \leq \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \leq 2$.

Άσκηση 9. Έστω μιγαδικοί z_1, z_2 που ικανοποιούν $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ και $z_1 z_2 \neq -1$. Δείξτε ότι

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}, \quad \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2} \in i\mathbb{R}.$$

Άσκηση 10. Βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών

$$3 - 4i, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad (1-i)^2(1+i)^4, \quad (2-i)(1+2i), \quad \left(\frac{3+i}{4-3i}\right)^2.$$

Άσκηση 11. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$ για τους οποίους ισχύει:

$$(a) |z - 1| = z, \quad (b) |z + i| = 2\bar{z}, \quad (c) |z| \geq 2, \\ (d) 1 < |z| < 2, \quad (e) |z + 1| = |z - 2i|, \quad (f) |z - i| > |z + 1|.$$

Άσκηση 12. Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z| = 1$, να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών $w = 2z + 1$.

Άσκηση 13. Δείξτε ότι για κάθε μιγαδικό ισχύει

$$\sqrt{2}|z| \geq |Re(z)| + |Im(z)|$$

Άσκηση 14. Έστω $z \neq -1$ μιγαδικός. Δείξτε ότι $|z| = 1$ αν και μόνον αν ο $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός αριθμός.

Άσκηση 15. Αν $|z| = 1$, τότε δείξτε ότι $\left| \frac{2z-i}{iz+2} \right| = 1$.

Άσκηση 16. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|2z-1| = |z-2|$, δείξτε ότι η εικόνα του είναι στον μοναδιαίο κύκλο.

Άσκηση 17. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|z| = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $|1+z|^2 + |1-z|^2$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα.

Άσκηση 18. (α) Αν $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

(β) Αν για τους μιγαδικούς $z_1, \dots, z_n$ ισχύει $|z_1| = \dots = |z_n| = 1$, να δείξετε ότι $|z_1 + \dots + z_n| = \left| \frac{1}{z_1} + \dots + \frac{1}{z_n} \right|$.

Άσκηση 19 (*). Έστω z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί με μέτρο $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ που ικανοποιούν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Να δείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 αντιστοιχούν σε κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.